Problème de Voisinage.

Nous proposons une solution à un célèbre problème de voisinage.

Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté avec $V = [1, \ldots, N] \neq [\ ]$ et E un ensemble d'arcs orientés $j \leftarrow i$ tels que $j \not\to i$. Notez que cela implique $i \not\leftarrow i$. On note $i \to \to j$ si j est à distance 2 de i et $i \not\to j$. Soient $G_1(i) = \{j : i \to j\}$ et $G_2(i) = \{j : i \to \to j\}$. La célèbre conjecture du second voisinage de Paul Seymour affirme que $\exists i\ \#G_1(i) \leq \#G_2(i)$. Nous allons montrer cela en prouvant plus. Comme souvent en sciences, un problème semble difficile parce qu'il cache un résultat plus riche mais plus simple.

Claim. *Il existe toujours au moins une solution à la conjecture de Seymour et s'il en existe une seule, alors elle n'a pas de successeur.*

Proof.

S'il n'y a pas d'arcs, tous les N sommets sont solutions et s'il en existe une seule alors $N = 1$ et le sommet n'a pas de successeur.

Sinon, on enlève un arc $x \to y$. Par induction sur le nombre d'arcs, il existe au moins une solution s. Si $s \neq x$, alors s restera solution en remettant l'arc $x \to y$ car cela ne peut pas dégrader sa situation.

Si la seule solution est $s = x$, alors x n'avait plus d'arc par hypothèse. Donc x a maintenant un seul successeur y qui en a au moins un autre z sinon y était aussi solution.

Donc x est encore solution. Et il y a bien au moins une solution.

Pour la deuxième assertion, procédons par l'absurde. Supposons qu'il y ait une seule solution x et qu'elle ait au moins un successeur y. On enlève l'arc $x \to y$. Il ne peut pas y avoir une autre solution $s \neq x$ car elle le resterait en remettant l'arc $x \to y$. Donc x est la seule solution et par hypothèse x n'a plus d'arc sortant. Donc x avait un seul arc sortant $x \to y$. Donc y a au moins un successeur $z \neq x$. On enlève l'arc $y \to z$. Il y a au moins une solution. Cela ne peut être x seul car il a un arc $x \to y$. Si c'est y seul alors y n'a plus d'arc et donc y avait un seul arc sortant $y \to z$ et ainsi de suite et on arrive à un graphe en cycle (ou en escargot) ayant au moins trois sommets et sans arcs supplémentaires. On aura bien au moins deux solutions, ce qui montre l'absurdité. ■

Dans [1], nous avons montré qu'il est plus difficile de trouver une solution que de vérifier qu'elle est correcte. Nous vous avons proposé une solution. Vérifiez qu'elle est correcte.

Nous pensons que ceci est également vrai :

Claim. *Tout sommet de degré sortant k est à distance au plus k d'une solution.*

Ce problème de voisinage sensible était assez simple. Les vrais problèmes sensibles entre voisins sur cette Terre sont parfois plus complexes. Nous portons toute notre attention sur celui entre Palestiniens et Israéliens qui dure depuis trop longtemps à cause de la folie meurtrière de l'Occident envers les juifs et ensuite de sa faiblesse, de sa pitié, de son sentiment de culpabilité et surtout de son manque de sens des responsabilités :

"Nous sommes fautifs...vraiment désolés. Bon d'accord. Allez vous installer chez les Palestiniens."

Le SIGLE a écrit à ces deux nations plusieurs lettres.

[1] www.sigle.space/single-post/2016/09/10/A-short-argument-that-NP-is-different-from-DTIME

(S.I.G.L.E.) Special Investigation Group for Life on Earth. www.sigle.space