

Grands Premiers.

Nous proposons quelques méthodes pour obtenir de grands nombres premiers.

Quelques conjectures à explorer.

Claim 0. Pour tout nombre $p \geq 2$ and every integer $d \geq 2$ where $d \neq h^q$ for $q \geq 2$, il existe k tel que $k^p - d$ est premier.

Claim 1. Pour tout nombre $p \neq 0, 1, 8, 14, 20, 26, 32, 38, \dots, 8 + 6h, \dots$, il existe k tel que $k^p - (k - 1)$ est premier.

Claim 2. Pour tout nombre $p \neq 0, 1, 4, 6, 8, 10, 12, 14, \dots, 4 + 2h, \dots$, il existe k tel que $k^p - (k - 1)^2$ est premier.

Claim 3. Pour tout nombre $p \neq 0, 1, 6, 9, 12, 15, 18, 21, \dots, 6 + 3h, \dots$, il existe k tel que $k^p - (k - 1)^3$ est premier.

Claim 4. Pour tout nombre $p \neq 0, 1, 4, 6, 8, 10, 12, 14, \dots, 4 + 2h, \dots$, il existe k tel que $k^p - (k - 1)^4$ est premier.

Claim p. Pour tout nombre premier $p = 2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots$, il existe k tel que $k^p - (k - 1)^p$ est premier.

Nombres de Mersenne.

Un nombre de Mersenne est un nombre premier de la forme $2^n - 1$ comme 3, 7, 31, 127, 8191, ...

Ce nombre est égal à la somme de n termes $2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{n-1}$

Si n n'est pas premier, alors on peut décomposer cette somme en blocs comme pour $n = 15 = 3.5$:

$$\underbrace{2^0 + 2^1 + 2^2}_{7.2^0} + \underbrace{2^3 + 2^4 + 2^5}_{7.2^3} + \underbrace{2^6 + 2^7 + 2^8}_{7.2^6} + \underbrace{2^9 + 2^{10} + 2^{11}}_{7.2^9} + \underbrace{2^{12} + 2^{13} + 2^{14}}_{7.2^{12}}$$

qui est donc multiple de $7 = 2^0 + 2^1 + 2^2$.

Si bien que n doit être lui-même premier pour que $2^n - 1$ le soit. La primalité de n est une condition nécessaire mais elle n'est pas suffisante. Par exemple $2^{11} - 1 = 2047 = 23.89$ n'est pas premier.

On peut le voir en réordonnant les termes comme ici :

$$\underbrace{2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^4}_{23.2^0} + \underbrace{2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^9}_{23.2^5} + \underbrace{2^3 + 2^8 + 2^{10}}_{23.56}$$

On va essayer de le voir autrement.....

$$\underbrace{2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^5}_{23.2^1} + \underbrace{2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^{10}}_{23.2^6} + \underbrace{2^0 + 2^4 + 2^9}_{23.2^3}$$

Voici des décompositions de $2^{11} - 1$ en multiples de 23. Nous représentons 2^k par k et 10 par X .

(0, 2, 6)	(1, 3, 7)	(4, 5, 8, 9, X)
(0, 2, 6)	(1, 5, X)	(3, 4, 7, 8, 9)
(0, 2, 6)	(3, 5, 9)	(1, 4, 7, 8, X)
(0, 2, 6)	(3, 8, X)	(1, 4, 5, 7, 9)
(0, 2, 6)	(1, 8, 9, X)	(3, 4, 5, 7)
(0, 4, 9)	(1, 3, 7)	(2, 5, 6, 8, X)
(0, 4, 9)	(1, 5, X)	(2, 3, 6, 7, 8)
(0, 4, 9)	(1, 6, 8)	(2, 3, 5, 7, X)
(0, 4, 9)	(3, 8, X)	(1, 2, 5, 6, 7)
(0, 4, 9)	(1, 2, 3, 5)	(6, 7, 8, X)
(0, 5, 7)	(1, 6, 8)	(2, 3, 4, 9, X)
(0, 5, 7)	(2, 4, 8)	(1, 3, 6, 9, X)
(0, 5, 7)	(3, 8, X)	(1, 2, 4, 6, 9)
(0, 5, 7)	(4, 6, X)	(1, 2, 3, 8, 9)
(0, 5, 7)	(1, 8, 9, X)	(2, 3, 4, 6)
(1, 3, 7)	(2, 4, 8)	(0, 5, 6, 9, X)
(1, 3, 7)	(4, 6, X)	(0, 2, 5, 8, 9)
(1, 3, 7)	(0, 2, 9, X)	(4, 5, 6, 8)
(1, 5, X)	(2, 4, 8)	(0, 3, 6, 7, 9)
(1, 5, X)	(2, 7, 9)	(0, 3, 4, 6, 8)
(1, 5, X)	(0, 7, 8, 9)	(2, 3, 4, 6)
(1, 6, 8)	(2, 7, 9)	(0, 3, 4, 5, X)
(1, 6, 8)	(3, 5, 9)	(0, 2, 4, 7, X)
(1, 6, 8)	(0, 2, 9, X)	(3, 4, 5, 7)
(2, 4, 8)	(3, 5, 9)	(0, 1, 6, 7, X)
(2, 4, 8)	(0, 1, 3, X)	(5, 6, 7, 9)
(2, 7, 9)	(3, 8, X)	(0, 1, 4, 5, 6)
(2, 7, 9)	(4, 6, X)	(0, 1, 3, 5, 8)
(2, 7, 9)	(0, 1, 3, X)	(4, 5, 6, 8)
(3, 5, 9)	(4, 6, X)	(0, 1, 2, 7, 8)
(3, 5, 9)	(0, 1, 2, 4)	(6, 7, 8, X)
(3, 8, X)	(0, 1, 2, 4)	(5, 6, 7, 9)
(4, 6, X)	(0, 7, 8, 9)	(1, 2, 3, 5)